

DIFERENTES ENFOQUES PARALELOS APLICADOS EN LA SIMULACIÓN DE UN PROBLEMA FÍSICO USANDO EL MÉTODO DE MONTE CARLO

E. Carreño, F. Piccoli, M. Printista

H. Velasco

Departamento de Informática
Universidad Nacional de San Luis
mprinti@unsl.edu.ar

Instituto de Matemática Aplicada San Luis
Universidad Nacional de San Luis
hvelasco@unsl.edu.ar

Resumen

El artículo se centra en una aplicación desarrollada para estimar la dosis de radiación debido a la emisión de fotones situados en el interior de un suelo contaminado con material radioactivo. Se describe una solución al fenómeno físico de interés mediante una simulación de Monte Carlo. Finalmente se proponen tres enfoques paralelos para la solución del problema planteado a partir de la tecnología existente, en la cual se utiliza el modelo de computación paralela *Bulk Synchronous Parallel (BSP)* como metodología de análisis y diseño.

1 Introducción

Se ha desarrollado un modelo (DAGES Model) para el cálculo del factor de tasa de dosis (dose-rate factor) debido a Gama Emisores depositados en el suelo [10]. Se desea saber el efecto que causa la exposición a la altura de un metro para fuentes distribuidas en el suelo. La esencia de la solución consiste en el seguimiento de un número representativo de fotones que parten del interior del suelo y, que a través de un análisis detallado de las posibles interacciones que encuentran en su camino, arriban a un blanco determinado. El proceso físico asociado a estas interacciones es simulado siguiendo la técnica de simulación de Monte Carlo [9], analizando, en términos de las probabilidades, las posibles interacciones fotón-medio. En la sección 3 de este artículo se describe el proceso completo de simulación que es solución al fenómeno bajo estudio.

Una implementación eficiente de la simulación planteada, podría requerir un tiempo extremadamente extenso de ejecución en una computadora convencional (de un único procesador), para determinados parámetros de entrada. Este tiempo de cálculo es inaceptable en un ambiente donde se debe trabajar de manera eficiente y donde el tiempo puede llegar a ser un factor crítico.

La computación paralela se ha vuelto una aproximación muy efectiva a aplicaciones que requieren mayor poder computacional que el actualmente disponible [4,7,15].

En los últimos años se ha demostrado la utilidad práctica del modelo *BSP* en varias aplicaciones en computación paralela [14]. Utilizarlo en la fase de diseño permite capturar, con claridad y con un grado aceptable de confiabilidad, las características sobresalientes de un fenómeno, además de facilitar el análisis y la predicción de los costos de posibles implementaciones.

La sección 2 hace referencia al modelo *BSP*, en la sección 4 se presentan y se discuten los diferentes enfoques paralelos que se proponen como solución al problema. En la sección 5 se hace un análisis *BSP* de las propuestas, en la sección 6 se exponen las conclusiones y finalmente, en la sección 7 se presentan las extensiones del trabajo.

2 El Modelo *BSP*

El modelo *BSP* establece un nuevo estilo de programación paralela para la realización de programas de propósito general. Los programas *BSP* son sencillos de escribir, son independientes de la arquitectura subyacente y la performance de sus programas sobre una arquitectura dada es predecible.

Aunque se ha descrito la computadora *BSP* como un modelo de arquitectura, también es posible considerarlo como una disciplina de programación. La idea fundamental de *BSP* es la división entre computación y comunicación. Se define un “paso” como una operación básica que se realiza sobre datos locales de un procesador. Todo programa *BSP* consiste en un conjunto de estos pasos, denominados “superpasos”. En los cuales primero existe una fase de computación local independiente, le sigue una fase global de comunicaciones y finalmente una sincronización por barrera que permite separar los diferentes superpasos.

Cualquier petición de datos remotos se puede realizar durante el superpaso, pero éstos datos no se podrán utilizar hasta entrar al siguiente superpaso, después de la sincronización. Todas estas peticiones son sin bloqueos, es decir no quedan a la espera de los datos sino que continúan con su computación. Esta forma de proceder permite a los diseñadores de algoritmos paralelos tener un modelo cuyo costo es sencillo de calcular.

La computación global de un programa *BSP* se calcula sumando los costos individuales de cada uno de los superpasos en que se ha dividido. Para una plataforma de software de una máquina *BSP* adecuada y una arquitectura de red *H* “suficientemente buena”, existen constantes g_H y L_H tales que el tiempo $CS_{H,s}$ insumido en comunicación mas la sincronización en un superpaso s es una función lineal del tamaño h_s de la h -relación asociada al superpaso s .

$$CS_{H,s}(h_s) = g_H * h_s + L_H$$

El tiempo t_s insumido por un algoritmo *BSP* en un superpaso s puede aproximarse por:

$$t_s \approx W_s + g_H * h_s + L_H$$

donde $W_s = \max \{w_{si} / i \in \{0, \dots, p-1\}\}$ y w_{si} denota el máximo tiempo de computación insumido por el procesador i en el superpaso s . La suma de los costos individuales de cada uno de los superpasos conforma el costo total de un programa *BSP*. La facilidad que implica la evaluación del costo es una de las características que han hecho del modelo *BSP* uno de los más populares.

El costo total de un programa con R superpasos es:

$$T_R = \sum_{s=0, R} (t_s)$$

3 Descripción del Modelo Físico

La solución es aplicable a situaciones en las que existe una contaminación del suelo con material radioactivo y se desea determinar la intensidad de la dosis de radiación gamma en el aire, a una altura de un metro sobre el suelo, debido a radionúclidos situados en su interior [13]. En el modelo se considera la porción comprendida dentro de un cilindro y ubicada debajo del detector, a nivel del suelo, como se muestra en la Figura 1.

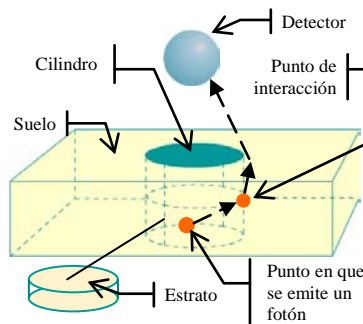


Figura 1: Modelo Físico

Se debe hacer el seguimiento de un subconjunto de fotones que debe ser estadísticamente representativo del problema a solucionar.

El seguimiento de un fotón comienza desde el momento en que es emitido desde la fuente, siguiendo todas las posibles interacciones que pudiera tener en el suelo hasta que:

1. El fotón muere.
2. Se escapa del sistema (no alcanza el detector).
3. Alcanza el detector.

Se debe analizar la porción de suelo comprendida dentro de un cilindro. Para ello se divide el cilindro en secciones de igual espesor denominadas estratos.

Situaciones ambientales, como por ejemplo variaciones en la densidad del suelo con la profundidad, o distribuciones complejas del perfil de contaminante en suelo, conducen a que los métodos analíticos impliquen una alta complejidad matemática que obliga a efectuar fuertes restricciones, por lo que la solución analítica no sería muy satisfactoria. La metodología que aquí se propone, se basa en el seguimiento de un número representativo de fotones, que parten del interior del suelo y que, a través de un análisis detallado de las posibles interacciones que encuentran en su camino, arriban a un blanco fijado. El proceso físico asociado a estas interacciones es simulado siguiendo la técnica de simulación por Monte Carlo, analizando, en término de las probabilidades, las posibles interacciones fotón-medio.

El fotón interacciona con los electrones ligados a átomos en las capas internas de la tierra. Dada la baja probabilidad de interacción del fotón en el aire, se asume que si el fotón llega a la superficie, éste no interacciona en este medio (aire) [10]. Entonces si el fotón llega a la superficie, que alcance o no al detector dependerá del ángulo con el que sale a la superficie.

Este método permite considerar la variabilidad del medio que encuentra el fotón en su camino y permite, potencialmente, considerar cualquier tipo de distribución vertical del contaminante en el suelo.

3.1 El Algoritmo De Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo es un método que está basado en el muestreo aleatorio de variables desde una distribución de probabilidad. Una *función de densidad de probabilidad (FDP)* $f(x)$, define la distribución de la variable aleatoria, x , sobre algún intervalo (a, b) . Si pudiéramos predecir la trayectoria exacta que sigue una partícula y los cambios de energía que experimenta mientras pasa por un medio de modo aleatorio, podríamos calcular un número importante de medidas útiles promediadas sobre un gran número de historias (de partículas) individuales. Por ejemplo, la probabilidad de que una partícula en un cierto rango de energía, sea absorbida en un volumen dado se puede estimar computando la proporción de todas las partículas con la energía requerida que terminan su historia dentro del volumen especificado (detector). El concepto de usar un gran número de historias de partículas, cada una de las cuales es de naturaleza aleatoria, para estimar algún comportamiento medio de las partículas, es el rasgo esencial del método de Monte Carlo [9].

En el algoritmo de Monte Carlo, las historias de las partículas son generadas simulando la naturaleza aleatoria de las interacciones de la partícula con el medio. No se necesita conocer exactamente las leyes que gobiernan el transporte de las mismas, sólo es necesario contar con expresiones matemáticas de las relaciones matemáticas de probabilidad que definen su comportamiento (su $f(x)$).

Debido a la intensidad de la energía emitida por el material radioactivo en el suelo (cesio 137) sólo se verifican dos de los tres procesos de interacción de la radiación con la materia, estos son: Efecto Fotoeléctrico y Efecto Compton. Ante una interacción del tipo Fotoeléctrica el fotón desaparece cediendo **toda** su energía al electrón, éste se moverá unas cuantas distancias interatómicas para luego ser absorbido por otro átomo (el fotón “muere”). Al verificarse una interacción del tipo

Compton, el fotón cede **parte** de su energía al medio y cambia su dirección, debido a la conservación del impulso.

La mayor ventaja del método de Monte Carlo es su flexibilidad y simplicidad para simular los movimientos de un fotón en una geometría arbitraria y en condiciones complejas. Dado que el error límite del método de Monte Carlo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de muestras estadísticas, se requiere un gran número de muestras para alcanzar una exactitud satisfactoria [2]. Por consiguiente, la principal desventaja del método de Monte Carlo es que el método es computacionalmente intensivo. Sin embargo, el método es muy adaptable a la computación paralela, esto es, al algoritmo se le puede aplicar alguna estrategia de descomposición de datos (descomposición de Granulo Grueso “Coarse grained”) [15]. Se puede decir que la computación paralela se introduce ya sea para mejorar la performance del método de Monte Carlo, para lograr una reducción en el tiempo de cálculo o para ambos objetivos.

Un algoritmo, como el planteado en la sección 3.1, pertenece al tipo de computación denominada “paralela ideal”, ya que ésta puede ser dividida completamente en partes independientes y cada parte ser ejecutada en forma asincrónica. Aunque paralelizar este tipo de problemas no requiere ninguna técnica o algoritmo especial, el diseño de nuestros enfoques esta fundamentalmente basado en las reglas impuestas por el modelo de computación paralela *BSP*. Ésto, además de brindarnos un entorno de trabajo simple y práctico, nos permitió el desarrollo de algoritmos alternativos enfocándonos principalmente en la escalabilidad y en la independencia de la arquitectura de cada uno.

Figura 2: Simulación de Monte Carlo

Suponemos contar con una computadora *BSP* con P procesadores. Los diferentes enfoques se refieren a la división del trabajo entre los P procesadores para lograr un rendimiento cercano al ideal. El análisis se ha orientado considerando algunos requisitos necesarios para un buen desempeño de los algoritmos resultantes:

- Equilibrar la computación w entre los distintos procesadores.
- Equilibrar las comunicaciones entre los diferentes procesadores.
- Minimizar el número de superpasos del algoritmo.

Se presentan y analizan tres posibles enfoques para que la simulación se ejecute en paralelo.

Primer enfoque: En un primer enfoque la cantidad de estratos es dividida entre los procesadores disponibles. Entonces si tenemos K estratos con N repeticiones por estrato y P procesadores, cada procesador deberá analizar $(K * N)/P$ estratos aproximadamente (si la división no es exacta, se divide la cantidad de fotones del estrato en cuestión). Cada procesador analiza los estratos que le corresponden y se sincronizan al final para obtener, entre los P procesadores, la Dosis Total. Esta propuesta es graficada en la Figura 3.

En esta propuesta, es indispensable determinar si existe un balance equitativo de la carga entre los procesadores. Se sabe que el ^{137}Cs (Cesio 137) se encuentra distribuido en el suelo de diversas maneras. En este trabajo hemos considerado dos; la distribución Uniforme y la distribución Exponencial.

En perfiles con distribución del tipo uniforme dentro de un cierto intervalo de profundidades el ^{137}Cs se halla en iguales concentraciones. Para los estratos más profundos, el número de fotones emitidos por el ^{137}Cs es aproximadamente igual que para los estratos menos profundos (cercaos a la superficie), pero en los estratos más profundos los fotones interactúan un tiempo mayor en promedio. Esto es porque para los estratos superiores llegará, en promedio, una cantidad mayor de fotones a la superficie, ya que la distancia desde donde son emitidos a la superficie es menor.

A efectos de equilibrar la carga entre los distintos procesadores proponemos realizar una distribución circular de los estratos entre los procesadores, situación que se muestra en la parte inferior de la Figura 3.

Para perfiles con distribución del tipo exponencial, a mayor profundidad de los estratos se calcula para una cantidad menor de fotones, pero por las razones que se expusieron anteriormente el tiempo de cálculo para este subconjunto de fotones se ve incrementado respecto de los fotones que están más cercanos a la superficie. Por lo que se deben pesar los factores (Concentración vs. Tiempo de cálculo) para determinar cual es aquel que tiene mayor incidencia.

Tanto para perfiles con distribución exponencial como para perfiles con distribución uniforme, tendremos que la mejor asignación de los estratos en los procesadores estará dada por los parámetros de entrada. Dado que el tipo de distribución será a futuro un parámetro de entrada, se requiere de un algoritmo que lleve a cabo la distribución de los estratos en los procesadores.

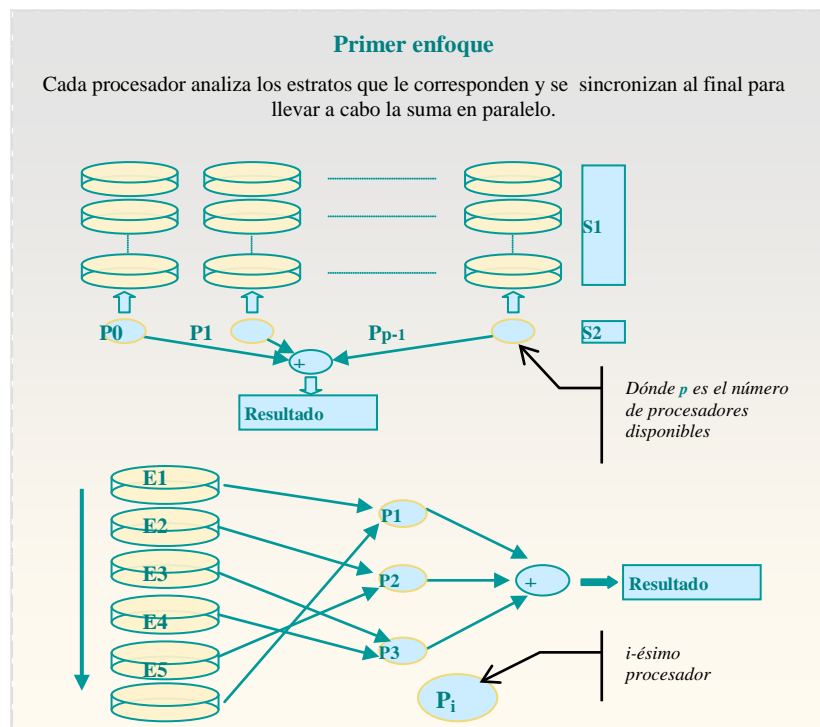


Figura 3: División de los estratos entre los procesadores

Segundo enfoque: El segundo enfoque considera realizar el cómputo paralelo dentro de cada estrato, dividiendo la cantidad de fotones que le corresponden a cada estrato entre la cantidad de procesadores disponibles. Se procede desde los estratos superiores a los estratos inferiores. No se lleva a cabo la suma sino hasta que hayan sido analizados todos los estratos. En este caso no es necesario el empleo de un algoritmo de balance de carga de acuerdo al tipo de distribución en profundidad. Esto es porque, podemos tener distintos tipos de distribuciones del ^{137}Cs , pero siempre la concentración varía en función de la profundidad. La Figura 4 muestra este enfoque.

Tercer enfoque: Finalmente la computación procede estrato por estrato, dividiendo el cómputo para la cantidad de muestras estadísticas entre los procesadores. Es decir, para cada estrato, cada procesador obtiene una muestra estadística del conjunto de fotones, como lo muestra la Figura 5.

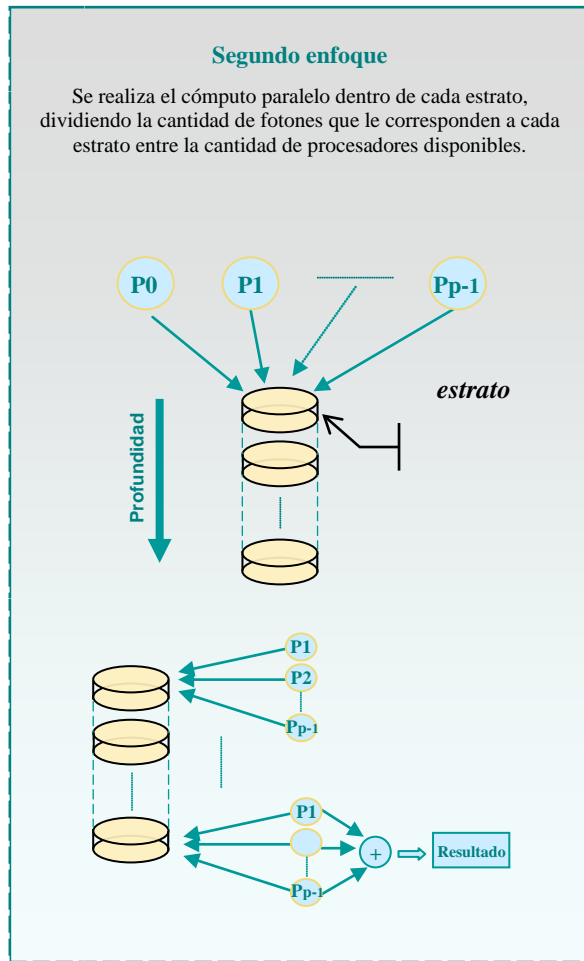


Figura 4: Cómputo paralelo dentro de cada estrato

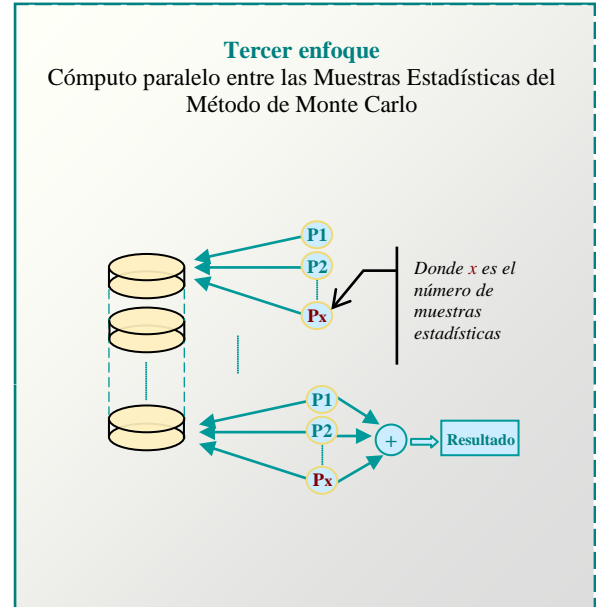


Figura 5: Cómputo paralelo entre corridas

5 Modelo de costo *BSP*

BSP es un modelo de computación paralela que proporciona mecanismos para predecir el tiempo de ejecución de un algoritmo. El modelo no toma en cuenta detalles de cómo se debe realizar el cómputo en los procesadores ni cómo se deben llevar a cabo las comunicaciones. El modelo define que un programa debe dividirse en superpasos y que al final de cada uno debe existir una sincronización global de los procesadores. Partiendo de esta base, el modelo *BSP* puede expresarse en muchos lenguajes y bibliotecas paralelas como *PVM*, *MPI* [11], etc. El único requerimiento es que todas ellas proporcionen mecanismos de comunicaciones sin bloqueos y una forma de implementar sincronización por barrera.

Sea:

P : el número de procesadores de la máquina *BSP*.

K : el número de estratos.

N : el número de repeticiones de la simulación.

A_0 : el costo requerido para el cálculo del número de fotones de cada estrato (f_e).

A_1 : el costo requerido para iniciar la emisión de un fotón.

A_2 : el costo requerido para el cálculo de la historia de un fotón (llega a la superficie e interacciona o se pierde).

Siguiendo el primer enfoque, cada máquina *BSP* resolverá el problema en dos superpasos:

$$t_{s1} = \max^p \left\{ \sum_{e=1}^{K/P} \left(A_0 + \sum_{i=1}^N (A_1 + A_2) * f_e \right) \right\} + L$$

En el primero, se procede a realizar el cálculo de la Dosis 1 (con $h_{1,i} = 0$, para $i=0, \dots, P-1$) computaciones en este superpaso son trivialmente paralelas, por lo que se obtiene un costo de:

En el segundo superpaso se procede a combinar los resultados parciales. En este punto las máquinas han completado su función específica y deberán proceder con una comunicación colectiva para elaborar el resultado final de la simulación (Dosis Total). La combinación de resultados indicará la finalización del procesamiento. Se cumple que, considerando una biblioteca paralela como *MPI* que optimice las comunicaciones colectivas, la h -relación del superpaso es $h_{2,i} = \log_2(P)$. Por lo que el costo del segundo superpaso será:

$$t_{s2} = \log_2(P) * g + L$$

Por lo tanto, se cumple que el tiempo *BSP* de ejecución se puede inferir con la siguiente

$$T(\text{Enfoque1}, P) = \max^p \left\{ \sum_{e=1}^{K/P} \left(A_0 + \sum_{i=1}^N (A_1 + A_2) * f_e \right) \right\} + \log_2(P) * g + 2 * L \quad (1)$$

expresión:

Procediendo de manera similar, se obtienen los modelos de computación para las restantes propuestas. En ambos casos, el grupo de procesadores disponible de la máquina *BSP* procede al cálculo de la Dosis Parcial incurriendo en un único superpaso intensivo de computación. Para el segundo enfoque, cada procesador es el encargado de la simulación de la historia del $(100/P)\%$ de la totalidad de los fotones de cada estrato. La actividad incluye las repeticiones necesarias de la

$$T(\text{Enfoque2}, P) = \max^p \left\{ \sum_{e=1}^K \left(A_0 + \sum_{i=1}^N (A_1 + A_2) * \frac{f_e}{P} \right) \right\} + \log_2(P) * g + 2 * L \quad (2)$$

simulación.

En el tercer enfoque, cada procesador es responsable de la obtención de una muestra estadística de la historia de f_e fotones de cada estrato. Para estos dos últimos casos, una vez finalizado el trabajo en un estrato y sin necesidad de sincronización, los procesadores pasan a procesar la misma subtask en los subsecuentes estratos. Una vez que se han recorrido todos los estratos, se sincronizan con una barrera global (*barrier*), asegurándose que todos hayan terminado sus subtasks (3) y realizan la comunicación colectiva necesaria para el cálculo de la Dosis Total.

$$T(\text{Enfoque3}, P) = \max^p \left\{ \sum_{e=1}^K \left(A_0 + \sum_{i=1}^{f_e} (A_1 + A_2) * \frac{N}{P} \right) \right\} + \log_2(P) * g + 2 * L$$

Los modelos resultantes muestran que los rendimientos de los algoritmos propuestos son altamente dependientes del cómputo local que cada procesador realice y, en general, éstos incurren en costos similares.

Pero existen algunas consideraciones que resultan del análisis de los tres modelos y que son convenientes resaltar.

Como se había mencionado, el primer enfoque requiere considerar una estrategia de balance de carga, de forma tal que la influencia del costo de analizar la historia de los fotones (representada por el parámetro A_2) sea similar en cada partición. Pero dado que la simulación no requiere de una distribución inicial de datos sino que considera que cada procesador genera localmente los fotones a tratar, esta estrategia de balance de carga contribuye con costo cero a la expresión (1).

El segundo enfoque es la propuesta que mayor escalabilidad promete y mayor posibilidad de lograr *speedup* lineal al aumentar P . Como se puede observar en (1) y (3), la escalabilidad de estas expresiones están acotadas por el número de estratos y por el número de muestras estadísticas requeridas por la simulación, respectivamente.

6 Conclusiones

En este artículo se han presentado enfoques alternativos para paralelizar el problema corriente, se han mencionados los principales aspectos teóricos así como también los procesos involucrados en la simulación.

La existencia de un modelo de costo sencillo ha permitido predecir el comportamiento de los algoritmos propuestos y además comparar distintas políticas de particionado de datos y por consiguiente distintas asignaciones de tareas a procesadores.

El modelo *BSP* nos ofreció, en la fase de diseño, una semántica clara para la explotación del paralelismo inherente en la aplicación. El cálculo que implica la historia de un fotón no es posible llevarlo a cabo en paralelo, independientemente si se consideran cilindros, estratos o cálculos dentro de estratos. Siempre se lleva a cabo el cálculo paralelo entre historias de fotones, las cuales son absolutamente independientes una de otras. En todos los casos se tiene un superpaso intensivo de computación en el cual cada procesador realiza el cálculo de la Dosis Parcial y luego se tiene un segundo superpaso intensivo de comunicación, para obtener la Dosis Total. Las propuestas maximizan las computaciones entre comunicaciones, minimizan el número de superpasos y explotan las propiedades *bulk* (por bulto) del problema al postergar toda la comunicación al último superpaso [12].

En la actualidad se están implementando los enfoques expuestos en una computadora paralela real, con el objetivo no sólo de darle la solución concreta al problema en cuestión sino también para realizar un análisis de convergencia entre el análisis teórico presentado en este artículo y la implementación real de los algoritmos. La implementación se está realizando con bibliotecas orientadas al modelo, por lo que se espera que la traducción de los diseños propuestos en programas paralelos se realice en forma sencilla y cómoda.

7 Futuras Extensiones

En el presente trabajo de investigación se ha considerado que el radionúclido está disperso en el suelo de acuerdo a algún tipo de distribución en profundidad (distribución vertical del contaminante), pero no consideramos que la concentración del contaminante podría variar de acuerdo con la distancia al detector (distribución horizontal del contaminante). El modelo tal cual está planteado, es aplicable a una situación real en la que es necesario analizar para un área en donde se encuentra, en el suelo, cualquier tipo de distribución **horizontal** del contaminante.

Así pues, se podría cubrir un área con cilindros, cada uno de los cuales podría tener una configuración diferente para los parámetros de entrada. La Figura 6 ilustra la situación.

Aplicación a un área con cualquier tipo de distribución horizontal del contaminante en el suelo

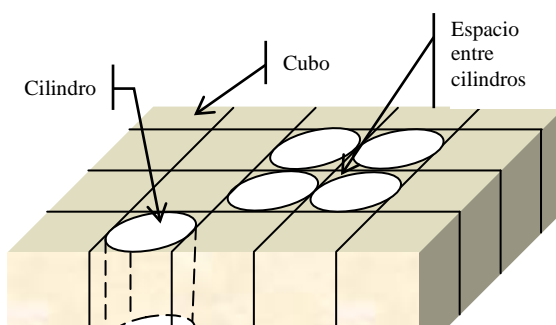


Figura 6: Aplicación en un Área

Se requiere una implementación diferente para este caso. Podría proponerse un enfoque donde los cubos son distribuidos entre los procesadores para llevar a cabo el cálculo paralelo de la dosis en cada uno o dada la naturaleza del problema está la posibilidad de un enfoque en cual incluya computación paralela anidada. Sin embargo, una discusión entre enfoques alternativos que sean solución a esta aplicación, requiere de una fase previa donde se modelice en forma adecuada y consistente los aspectos relevantes de cada nueva posibilidad paralela.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Unidad de Servicio Computacional (para aplicaciones científicas) del Instituto de Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de San Luis, (IMASL) por permitirnos realizar los experimentos sobre su *cluster* de computadoras.

Bibliografía

- [1] Alexiou S., Topcuoglu J., Twining S., Uchida S. and Wasserman M. *Journal of Environmental Radioactivity* 58, N. 2-3, 2002, pp 113-128.
- [2] Sawetprawichkul A., Hsu P., and Mitra K. Parallel computing of three-dimensional Monte Carlo simulation of transient radioactive transfer in participating media.
- [3] Frissel M., Deb D., Fathony Y., Lin, A., Mollah N., Ngo I., Othman W., Robinson V. Skarlou-Alexiou, V., Topcuoglu, S., Twining, J. R., Uchida, S. and Wasserman, M. A. (2002). Generic values for soil-to-plant transfer factor of radiocesium. *Journal of Environmental Radioactivity*, 58, 113 - 128.
- [4] Foster I., Designing and Building Parallel Programs. Addison-Wesley. 1994.
- [5] Mamikhin S. Expert and information system ECORAD: estimation and prognosis of

- consequences of forest ecosystem radioactive contamination. *Newsletter of International Union of Radioecology*, N 24, 1996, pp 8-9.
- [6] Müller, H. & Bleher, M.: Exposure pathways and dose calculations in RODOS: improvement of predictions by measured data. *Radiat. Prot. Dosim.* 73, 61-66 (1997) Origin 6.0. Microcal™ (1999).
 - [7] Quinn M.- Parallel Computing. Theory and Practice. Second Edition. McGraw-Hill, Inc. 1994.
 - [8] Rafferty B. FORIA: Forest Impact Analysis. An interactive decision support software providing information on the secondary effects of radiological countermeasures applied in forest. *Journal of Environmental Radioactivity* 56, N. 1-2 2001, pp 209-214.
 - [9] Rodríguez M. & Velasco H.: Determinación de la tasa de dosis debida a gama emisores depositados en el suelo. Simulación de Monte Carlo. *Annals of the Argentinean Physics Association* 10, 1998, pp 310-314, (in spanish).
 - [10] Shultis K. 1996. 'Radiation Shielding'. Prince Hall.
 - [11] Snir, M., Otto, S., Huss-Lederman, S., Walker, D., Dongarra, J. MPI: The complete Reference. Cambridge, MA: MIT Press, 1996.
 - [12] Skillcorn, D.B., Hill, J., McColl, W.F. Questions and Answers about BSP. Oxford University Computing Laboratory. Report PRG-TR-15-96. 1996.
 - [13] Toso J. P. & Velasco R. H. 2001. Describing the observed vertical transport of radiocesium in specific soils with three time - dependent models. *Journal of Environmental Radioactivity* 53, 2001, pp 133-144.
 - [14] Valiant L.G.. A Bridging Model for Parallel Computation. *Communications of the ACM*, 33(8): 103-111, 1990.
 - [15] Wilkinson B. & Allen M., Parallel Programming: Techniques and Application using Networked Workstations, Prentice-Hall. 1996.